CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
”DUMITRU ȚIGANETEA”
ediția a XX-a, mai 2023, Dej

BAREM CLASA A III-A

Partea I

Treceți sub numărul problemei rezultatul corect!

Problema:	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**
Rezultat:	**c**	**c**	**b**	**a**	**b**	**b**

Partea a II-a

1.	[418 – (2 x 200 + a)] : [19 – (40 : 4 + 4)]=1	10
	[418 – (2 x 200 + a)] : (19 – 14)=1	2
	[418 – (400 + a)] : 5=1	2
	[418 – (400 + a)] = 5	2
	(400 + a) = 413	2
	a = 13	2
2.		20
	Notăm cu f- numărul fetelor şi cu b- numărul băieţilor	2
	1/3 din numărul băieţilor 26 – 2 x 11 = 4	6
	Nr. băieţilor 3 x 4 = 12	6
	Nr fetelor (11 – 4) x 2 = 14 sau 26 – 12 = 14	6
3.		20
	Reprezentarea grafică	3
	Egalizarea segmentelor- 144 – 14 + 8 = 138	4
	Numărul de pagini citit a doua zi – 138 : 6 = 23	4
	Numărul de pagini citit în prima zi - 23 x 3 = 69	3
	Numărul de pagini citit a treia zi - 23 + 14 = 37	3
	Numărul de pagini citit a patra zi - 23 – 8 = 15	3
4.		20
	Dacă vopsim tabla ca la șah în pătrățele albe și negre vom avea 24 albe și 25 negre. Licuricii care zboară de pe pătrățele albe se așază pe pătrățele negre. Fiind 24 licurici așezați pe pătrățele albe, se vor așeza pe pătrățele negre. Deci cel puțin un pătrățel negru rămâne fără licurici. sau altă rezolvare prin reprezentare grafică.	

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ”DUMITRU ȚIGANETEA”
ediția a XX-a, mai 2023, Dej

Se acceptă orice soluție corectă, diferită de cea din barem.

BAREM CLASA A IV-A

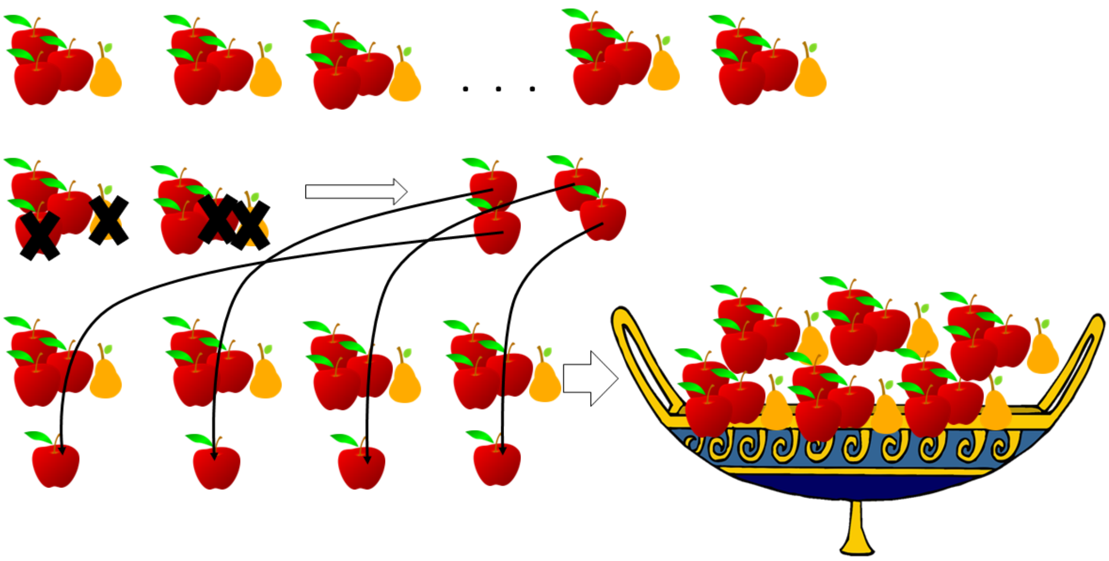
Partea I
Treceți sub numărul problemei rezultatul corect!

Problema:	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**
Rezultat:	**b**	**c**	**b**	**b**	**b**	**c**

Partea II

1.a	105 – 30 : {54 – 45 : [30 – 24 : (a - 15) – 7] x 15 + 15 : 15 }= 102	**10**
	30 : {54 – 45 : [30 – 24 : (a - 15) – 7] x 15 + 1 }=3	**1**
	54 – 45 : [30 – 24 : (a - 15) – 7] x 15 + 1= 10	**1**
	54 – 45 : [30 – 24 : (a - 15) – 7] x 15=9	**1**
	45 : [30 – 24 : (a - 15) – 7] x 15=45	**1**
	45 : [30 – 24 : (a - 15) – 7] = 3	**1**
	30 – 24 : (a - 15) – 7 =15	**1**
	30 – 24 : (a - 15) =22	**1**
	24 : (a - 15)= 8	**1**
	a – 15=3	**1**
	a= 18	**1**
1.b		**10**
	Se adună relaţiile a x b = 126 a x c = 84 şi obţinem a x b + a x c = 126 + 84 a x(b + c) = 210	**3**
	Se află i) a x (b+c) : 3 = 210 : 3 = 70	**2**
	Se scad relaţiile a x b = 126 a x c = 84 şi obţinem a x b - a x c = 126 - 84 a x (b - c) = 42	**3**
	Se află ii) 15 x a x (b -c) : 6 = 15 x 42 : 6 = 105	**2**

2.	Dacă împărţim suma a două numere la diferenţa lor, obţinem câtul 1 şi restul 14, iar dacă adunăm suma cu diferenţa lor, obţinem 86. Care sunt cele două numere?	**20**
	Notăm: a + b = S a – b = D	**1**
	S : D = 1 rest 14 S + D = 86	**1**
	S ├──────────┼14┤ D ├──────────┤ 86	**2**
	D= 36	**4**
	S=50	**4**
	Reprezentare grafică	**2**
	b = 7	**3**
	a = 43	**3**
3.		**20**
	Lângă fiecare pară punem câte trei mere, obținând astfel figura <u>MMMP</u>, <u>MMMP,</u>…, <u>MMMP.</u>	**3**
	Luând cele două mere și două pere, punându-le apoi în grupele care conțin deja câte trei mere și o pară, obținem figura: <u>MMMMP</u>, <u>MMMMP,</u>…, <u>MMMMP .</u>	**5**
	Avem în final $4 \cdot 4 = 16$ mere și $4 \cdot 1 = 4$ pere.	**6**
	Inițial, în vas erau $16 + 2 = 18$ mere și $4 + 2 = 6$ pere.	**6**



Se acceptă orice soluție corectă, diferită de cea din barem.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ”DUMITRU ȚIGANETEA”

BAREM
Clasa a V-a

1.
a) Arătați că numărul ***a*** este cub perfect:

$\boldsymbol{a} = \{16^8 \cdot 8^4 \cdot 4^6 \cdot 2^5 + [(3^{505})^2]^2 + 2023\}:\{(27^{100}:9^{49})^{10} + (2^7)^{10} + 1^{2023}\}$

Soluție:

$a = \{(2^4)^8 \cdot (2^3)^7 \cdot (2^2)^6 \cdot 2^5 + 3^{2020} + 1\}:\{[(3^3)^{100}:(3^2)^{49}]^{10} + 2^{70} + 1\} =$ 2p
$= \{2^{70} + 3^{2020} + 1\}:\{3^{2020} + 2^{70} + 1\} = 1 = 1^3$ 2p

b) Aflați ultimele trei cifre ale câtului împărțirii la 16 a numărului $5^{2025} + 11 \cdot 5^{2024} - 7$.

Soluție:

$5^{2024} \cdot (5 + 11) - 16 + 9 = 16 \cdot (5^{2024} - 1) + 9$ 1p
$u_3(5^{4k} - 1) = 625 - 1 = 624$ 2p

2. a) Să se arate că $3^2 + 7^2 + 11^2 + 15^2 + 19^2 + 23^2 + 27^2 = 2023$.
b) Să se arate că numărul 2023^{2025} se poate scrie ca suma a 7 numere naturale pătrate perfecte, distincte și diferite de zero.

Soluție:

a) $3^2 + 7^2 + 11^2 + 15^2 + 19^2 + 23^2 + 27^2 = 9 + 49 + 121 + 225 + 361 + 529 + 729$
$= 2023$ 3p

b) $2023^{2025} = 2023^{2024} \cdot 2023 =$
$= (2023^{1012})^2 \cdot (3^2 + 7^2 + 11^2 + 15^2 + 19^2 + 23^2 + 27^2)$ 2p
$= (2023^{1012} \cdot 3)^2 + (2023^{1012} \cdot 7)^2 + (2023^{1012} \cdot 11)^2 + (2023^{1012} \cdot 15)^2 +$
$+(2023^{1012} \cdot 19)^2 + (2023^{1012} \cdot 23)^2 + (2023^{1012} \cdot 27)^2$ 2p

3.
Scriem consecutiv toate numerele divizibile cu 5 până la 2025 inclusiv.

a) Câte cifre are numărul format?
b) Aflați cifra care se află pe poziția 1234.

Soluție:

a) Numărul format este: $5101520 \dots \dots \dots 20202025$ 1p
dintre eacestea: cu 1 cifră este 1
cu 2 cifre sunt 18
cu 3 cifre sunt 180
cu 4 cifre sunt $2025:5-(1+18+180)=206$ 1p
deci numărul este format din $1 \cdot 1+18 \cdot 2+180 \cdot 3+206 \cdot 4=1401$ cifre 1p

b) cu numerele de 1, 2 și 3 cifre ajungem la poziția 577 1p
$1234-577=657$ cifre formate cu numere de 4 cifre 1p
$657:4=164$ $și\ rest$ 1
astfel cifra de pe poziția 1234 va fi prima cifră din al 165-lea număr cu 4 cifre
$\{$acesta este $1000+164 \cdot 5=1820\}$
astfel cifra căutată este 1 2p

4.
Care este cel mai mare număr par care nu poate fi scris ca sumă de două numere compuse impare?
AIME SUA

Solutie:

Arătăm că numerele pare sunt de forma $6k, 6k+2$ sau $6k+4$.

Observăm că

numerele $9=3 \cdot 3, 25=5 \cdot 5, 35=5 \cdot 7$ și $6m+3=3(2m+1), m \in N^*$ sunt numere impare compuse.

Avem $6m+12=(6m+3)+9$, $6m+38=(6m+3)+35$, $6m+28=(6m+3)+25$, adică toate numerele de forma $6k, k \geq 3$, respectiv $6k+2, k \geq 7$ și $6k+4, k \geq 5$ se scriu ca suma a două numere impare compuse.

Cel mai mare număr care nu se poate scrie ca sumă de două numere impare compuse este 38.

Numere impare compuse mai mici ca 38 sunt 9, 15, 21, 25, 27, 33 și 35.

Pentru a arăta că 38 este cel mai mare , observăm că unul dintre cele două numere impare compuse trebuie să fie mai mic sau egal cu 19, adică 9 sau 15. Dar $38-9=29$ și $38-15=23$ nu sunt compuse, deci 38 este maximul.

7p

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ”DUMITRU ȚIGANETEA”

BAREM
Clasa a VI-a

Probleme 1.

Fie $a_1, a_2, .., a_{2023}$ numere raționale pozitive cu proprietatea că $\frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{2} = \frac{a_3}{2^2} \dots = \frac{a_{2023}}{2^{2022}}$ și $a_1 + a_3 + \dots + a_{2023} = 2^{2024} - 1$.

Determinați numerele naturale x și y din proporția: $\frac{a_{2023}}{2^{x^2 y}} = \frac{3}{2^{x^2+1}}$

Soluție:

$\frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{2} = \frac{a_3}{2^2} = \dots = \frac{a_{2023}}{2^{2022}} = \frac{2^{2024}-1}{\frac{2^{2024}-1}{3}} = 3$ 2p

$=> \ a_{2023} = 3 \cdot 2^{2022}$ 1p

$\frac{a_{2023}}{2^{x^2 y}} = \frac{3}{2^{x^2+1}} \Leftrightarrow \frac{2^{2022}}{2^{x^2 y}} = \frac{1}{2^{x^2+1}}$ 1p

$2^{x^2 y} = 2^{x^2+2023} \Leftrightarrow x^2 y = x^2 + 2023$ 1p

$\left.\begin{aligned} x^2(y-1) = 2023 \\ 2023 = 17^2 \cdot 7 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 17, y = 8$ SAU $x = 1, y = 2024$ 2p

Problema 2.

Arătați că numărul $a = 13^n + 29^{2n} + 5 \cdot 2^{n+1} - 2^{4n}$ este divizibil cu 22, pentru orice număr nenul n.

Soluție:

13^n *respectiv* 29^{2n} *sunt impare pentru orice* $n \in \mathbf{N} \Rightarrow 13^n + 29^{2n} \ \vdots\ 2$ 2p

cu 2^{n+1} și $2^{4n} \vdots 2$ rezultă $a \vdots 2$ 1p

$a = (11+2)^n + (33-4)^{2n} + 11 \cdot 2^n - 2^n - 4^{2n}$ 1p

$= M_{11} + M_{11} + 11 \cdot 2^n \Rightarrow a \vdots 11$ 2p

$\left.\begin{aligned} a \vdots 2 \\ a \vdots 11 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a \vdots 22\ \forall\, n \in \mathbf{N}^*$ 1p

Problema 3.

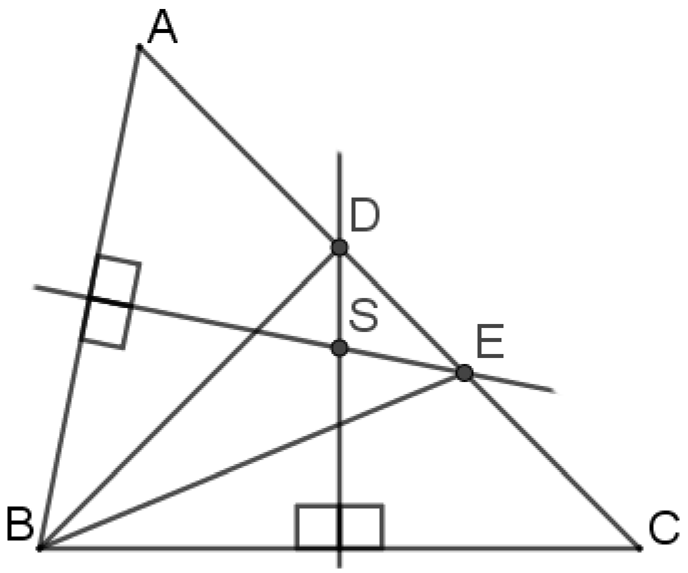
În triunghiul $ABC, AB < AC$ mediatoarea laturii *AB* intersevtează latura *AC* în punctul E iar mediatoarea laturii *BC* intersectează latura *AC* în *D*, $D \neq E$, astfel încât $AD = CE$.

a) Arătați că ΔBDE este isoscel!

b) Arătați că punctul de intersecție *S* a mediatoarelor laturilor *AB* respectiv *BC* este situat pe bisectoarea unghiului *ABC*!

c) Dacă $m(\sphericalangle DBE) = 24°$ aflați măsurile unghiurilor triunghiului *ABC*!

Soluție:



a) $\left.\begin{array}{r} D \in \text{mediatoarea } BC \ \Rightarrow DB = DC \\ E \in \text{mediatoarea } AB \ \Rightarrow AE = BE \\ AD = CE \ \Rightarrow AE = CD \end{array}\right\} \Rightarrow DB = BE \Leftrightarrow BDE \text{ isoscel}$ 2p

b) din a) $\Rightarrow \widehat{BDE} \equiv \widehat{BED} \ \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \widehat{BDA} \equiv \widehat{BEC} \\ BD \equiv BE \\ AD \equiv EC \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BEC \equiv \Delta BDA$ 1p

$\Longrightarrow BA \equiv BC \Rightarrow \Delta BAC \ isoscel$ 1p

$\left.\begin{array}{r} \Delta BAC \ isoscel \\ S \in mediatoarea \ AC \end{array}\right\} \Rightarrow S \in bisectoarea \sphericalangle ABC$ 1p

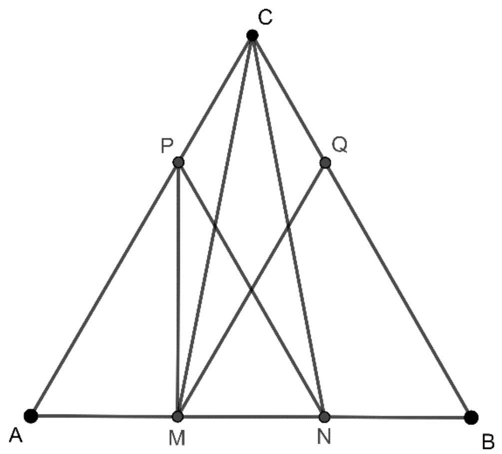
c) $\widehat{DBE} = 24° \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \widehat{BDE} = \widehat{BED} = 78° \\ \Delta AEB \ isoscel \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{EAB} = 51°$ 1p

$\widehat{BAC} = \widehat{BCA} = 51 \ \Rightarrow \widehat{ABC} = 78°$ 1p

Problema 4.

Pe latura AB a triunghiului echilateral ABC se consideră punctele Mși N astfel încât $AM = MN = NB$. Pe latura AC se ia punctul P , astfel Încât $CP = AM$. Determinați suma măsurilor unghiurilor $\sphericalangle CMP$ și CNP.

Soluție:



Fie $Q \in (BC)$ astfel încât $CQ = CP$.
Dacă notăm latura triunghiului echilateral cu a,
atunci $AM = MN = NB = \frac{a}{3}$, $CP = CQ = \frac{a}{3}$ și $AP = BQ = AN = \frac{2a}{3}$. 1p
$\Delta AMC \equiv \Delta BNC \Rightarrow CM = CN$ 1p
ΔAPN echilateral$\Rightarrow$ $PN = \frac{2a}{3}$ și ΔMQB echilateral$\Rightarrow$ $MQ = \frac{2a}{3}$, $\sphericalangle QMB = 60^0$ 1p
$\Delta CNP \equiv \Delta CMQ \Rightarrow \sphericalangle CMQ = \sphericalangle CNP$ 2p
$\sphericalangle PMC + \sphericalangle PNC = \sphericalangle PMC + \sphericalangle CMQ = \measuredangle PMQ$ 1p
În ΔAPN echilatral , PM mediană, deci înălțime, adică $\sphericalangle PMN = 90^0$
$\Rightarrow \sphericalangle PMQ = 90^0 - \measuredangle QMB = 30^0$, deci $\sphericalangle PMC + \sphericalangle PNC = 30^0$ 1p