MINISTERUL EDUCAȚIEI NAŢIONALE
Inspectoratul Şcolar Judeţean Cluj
Colegiul Naţional „Andrei Mureşanu” Dej

Concursul Interjudeţean de Matematică
„Dumitru Ţiganetea”
Ediţia a XVIII-a, 14 aprilie 2018

BAREME
Clasa a III – a

1.

a. Calculaţi: $401+3\times\left[15+3\times7+2\times\left(7\times6-12\right)\right]-354$.

b. Aflaţi necunoscuta din egalitatea $\left[418-\left(2\times200+x\right)\right]:\left[19-\left(40:4+4\right)\right]=1$

Soluție:

a. 335 **4p**

b. x = 13 **3p**

2. Aflaţi numerele a,b,c **știind că:** $a+b=16,\quad b+c=14$ **şi** $a+c=12$.

Soluție:

Prima soluţie obţinută **3p**

A doua soluţie obţinută **2p**

A treia soluţie obţinută **2p**

3. Două păpuși și patru ursuleţi costă 100 lei.o păpușă costă cât trei ursuleţi.cât costă ursuleţul? Dar păpușa?

Soluție:

Inlocuirea unei marimi cu alta 2 păpuși=6 ursuleţi **2p**

10 ursuleţi costă 100lei **2p**

1 ursuleţ costă 10 lei **1p**

1păpușă costă 3x10 lei=30lei **2p**

4. **În clasa a III- a sunt 29 de elevi, băieţi și fete. Suma dintre numărul fetelor și jumătate din numărul băieților este 22.**

   Câţi băieţi și câte fete sunt în clasă?

Soluție:
Reprezentarea grafică **1p**

Calcularea a jumătate din numarul băietilor 29-22=7 **2p**

Determinarea numărului băieţilor 7x2=14 **2p**

Determinarea numărului fetelor 29-14=15 **2p**

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
Inspectoratul Şcolar Judeţean Cluj
Colegiul Naţional „Andrei Mureşanu” Dej

Concursul Interjudeţean de Matematică

„Dumitru Ţiganetea”

Ediţia a XVIII-a, 14 aprilie 2018

BAREME

Clasa a IV – a

1.

a. Calculaţi valoarea necunoscutei din:

$105-30:\{54-45:[30-24:(a-15)-7]\times 15+15:15\}=102$.

b. Știind că $a+b-c=10$ **și** $b+2c-d=11$**, calculaţi** $3a+5b+c-2d$ **.**

Soluție:

a. a=18 **4p**

b. Adunarea relaţiilor **1p**

Inmulţirea cu 3 a relaţiei obţinute mai sus **1p**

Scăderea relaţiei date din relaţia anterioară **1p**

2. În curtea bunicii sunt găini, raţe și porci, în total 22 de capete si 52 de picioare. Câte animale de fiecare fel sunt dacă numărul raţelor este jumătate din numărul găinilor?

Soluție:

Presupunem că toate vietuitoarele sunt pasări $22\times 2=44$ **1p**

Diferenţa dintre numarul real si cel obţinut 52-44=8 **1p**

Diferenţa dintre numărul de picioare al vieţuitoarelor 4-2=2 **1p**

Numărul de porci $8:2=4$ **1p**

Numărul păsărilor 22-4=18 **1p**

Numărul raţelor 18:3=6 **1p**

Numărul găinilor $6\times 2=12$ **1p**

3. **Pentru Olimpiada Internațională de Matematică din 2018 , ce se va desfășura în Cluj-Napoca, s-a comandat la Salina Ocna-Dej, o cantitate de sare ce se va transporta în cutii.**
   Dacă în fiecare cutie se pun 20 kg , nu încap 55 kg de sare, iar dacă punem 25 de kilograme în fiecare cutie, rămâne o cutie cu 15 kg și trei cutii nefolosite.
   Aflaţi ce cantitate de sare s-a comandat și câte cutii au fost cumpărate.

Soluție:

Notăm cu S numărul kilogramelor de sare C numărul de cutii **1p**

$S = 20 \times C + 55$ **2p**

$S = 25 \times (C - 4) + 15$ **2p**

Egalizând cele două relaţii, obţinem:

C=28cutii **1p**

S=615 de kilograme sare **1p**

4. **Un număr se numește *accesibil* dacă ultima cifră a lui este egala cu dublul sumei celorlalte cifre ale numărului (de exemplu , numărul 2016 este *accesibil* deorece** $2\times(2+0+1)=6$ **). Câte numere *accesibile* de patru cifre, mai mari decât 2000 există?**

Soluție:

Fie $\overline{abcd}$ numerele căutate **1p**

$a \geq 2$ și $d = 2\times(a+b+c) \Rightarrow d \leq 9$ **1p**

d cifră $\Rightarrow d = 4, 6, 8$ **1p**

$d = 4 \Rightarrow b = c = 0 \Rightarrow 2004$ este unul din numere **1p**

$d = 6 \Rightarrow b = 0, c = 1$ sau $b = 1, c = 0$ sau $b = c = 0 \Rightarrow a = 2; 3 \Rightarrow 2016, 2106, 3006$ numere căutate **1p**

$d = 8 \Rightarrow 2028, 2118, 2208, 3018, 3108, 4008$ **2p**

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
Inspectoratul Şcolar Judeţean Cluj
Colegiul Naţional „Andrei Mureşanu" Dej

Concursul Interjudeţean de Matematică
„Dumitru Ţiganetea"
Ediţia a XVIII-a, 14 aprilie 2018

BAREME
Clasa a V – a

1. **Se dau numerele:**

$$a=\left(2^{20}:4^5-1024+10^2-2^6-6^2\right)^{2007}+2007^2-2006\cdot 2007 \quad \textbf{şi} \quad b=2\cdot 10^3+1-2^4\cdot 5^3;$$

a. Calculaţi $\left(a-2006\cdot b\right)^{2018}$**.**

b. Arătaţi că $2008\cdot\left(a+b\right)$ **este pătrat perfect.**

Soluție:

a. Obţine a=2007 **2p**

Obţine b=1 **1p**

Obţine $\left(a-2006\cdot b\right)^{2018}=1$ **2p**

b. Arată că $2008\cdot\left(a+b\right)=2008^2$ care este pătrat perfect **2p**

2. **Determinaţi cifra** a **pentru care fracţia** $\dfrac{a^2\cdot\overline{aa}+a^2\left(a^2+1\right)}{\overline{202a}}$ **este echiunitară.**

Soluție:

Din $\dfrac{a^2\cdot\overline{aa}+a^2\left(a^2+1\right)}{\overline{202a}}$ echiunitară $\Rightarrow a^2\left(10a+a\right)+a^2\left(a^2+1\right)=\overline{202a}$ **1p**

$\Leftrightarrow a^2\left(a^2+11a+1\right)=2020+a$ **1p**

$a^4+11a^3+a^2-a=2020$ **1p**

$a\left(a^3+11a^2+a-1\right)=2^2\cdot 5\cdot 101$ **1p**

Din a- cifră rezultă $a=2; a=4; a=5$ şi a=2 nu convine **1p**

$a=4$ nu convine **1p**

$a=5$ soluţie **1p**

3. Se scriu pe o tablă în ordine crescătoare, toate numerele naturale de la 1 până la 2018 inclusiv. Numerele 1 şi 2 se şterg. Se numără 3 numere, iar 6 şi 7 se şterg. Se numără alte 3 numere şi următoarele două se şterg. Se continuă astfel până la ultimul număr şters.

a. Care este cel de-al 205-lea număr şters?

b. Verificaţi dacă numărul 1972 va fi şters. Dacă va fi şters, precizaţi al câtelea număr şters este, iar dacă nu va fi şters, justificaţi de ce nu este şters.

Soluție:

a. Notăm cu T_1, T_2, T_3 …….. primul număr şters, al treilea număr şters, al cincilea număr şters

Notăm cu P_1, P_2, P_3 ……..al doilea număr şters, al patrulea număr şters, al şaselea număr şters

Atunci:

$$T_1 = 1 + 0 \cdot 5 = 1 \qquad P_1 = 2 + 0 \cdot 5 = 2$$
$$T_2 = 1 + 1 \cdot 5 = 6 \qquad P_2 = 2 + 1 \cdot 5 = 7$$
$$T_3 = 1 + 2 \cdot 5 = 11 \qquad P_3 = 2 + 2 \cdot 5 = 12$$
$$\ldots \qquad \ldots$$
$$T_{102} = 1 + 101 \cdot 5 = 506 \qquad P_{102} = 2 + 101 \cdot 5 = 507$$
$$T_{103} = 1 + 102 \cdot 5 = 511$$

Cel de-al 205-lea număr şters va fi **511** **5p**

Pentru soluţia aflată prin numărarea termenilor se vor acorda 2p

b. 1972 va fi şters dacă are una din formele:

$$T_n = 1 + (n-1) \cdot 5 = 1972 \qquad P_m = 2 + (m-1) \cdot 5 = 1972$$
$$(n-1) \cdot 5 = 1971 \qquad (m-1) \cdot 5 = 1970$$

$n \notin N$ $\qquad m = 395$ **1p**

$395 \cdot 2 = 790$ numere, deci numărul 1972 va fi al 790-lea număr şters **1p**

4. Determinaţi un multiplu al numărului 17 care se scrie numai cu cifra 1.
Soluție:

$\frac{1}{17} = 0,(0588235294117647)$ **4p**

$\frac{1}{17} = \frac{588235294117647}{\underbrace{99......9}_{16 ori}}$ **1p**

Simplifică cu 9, obţine $\frac{1}{17} = \frac{65359477124183}{\underbrace{111.....1}_{16 ori}}$ **1p**

$17 \cdot 65359477124183 = \underset{16 ori}{11....1}$ **1p**

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
Inspectoratul Şcolar Judeţean Cluj
Colegiul Naţional „Andrei Mureşanu” Dej

Concursul Interjudeţean de Matematică
„Dumitru Ţiganetea”
Ediţia a XVIII-a, 14 aprilie 2018

BAREME
Clasa a VI – a

1.

a. Ştiind că $\frac{2019}{a+6}+\frac{2019}{b+8}+\frac{2019}{c+10}+\frac{2019}{d+12}=2692$,

Să se calculeze $\frac{a+3}{a+6}+\frac{b+5}{b+8}+\frac{c+7}{c+10}+\frac{d+9}{d+12}$.

b. Determină cel mai mic număr natural, multiplu de 45 cu exact 45 de divizori.

Soluție:

a.

$$\frac{a+3}{a+6}+\frac{b+5}{b+8}+\frac{c+7}{c+10}+\frac{d+9}{d+12}=$$
$$1-\frac{3}{a+6}+1-\frac{3}{b+8}+1-\frac{3}{c+10}+1-\frac{3}{d+12}=\text{..............}1p$$
$$=4-3\left(\frac{1}{a+6}+\frac{1}{b+8}+\frac{1}{c+10}+\frac{1}{d+12}\right)\text{........................}1p$$
$$=4-3\cdot\frac{2692}{2019}=0\text{..}1p$$

b. Numărul are forma $3^a\cdot 5^b\cdot A=M_{45}, a\geq 2, b\geq 1$ **1p**

Dacă A=1, $(a+1)(b+1)=45\Rightarrow$

a+1	3	9	5	15
b+1	15	5	9	3

a	2	8	4	14
b	14	4	8	2

Deci numerele vor fi $3^2 5^{14}$; $3^8 5^4$; $3^4 5^8$; $3^{14} 5^2$ **1p**

Dacă A$\geq$ 2 , pentru a fi cel mai mic luăm forma $3^a \cdot 5^b \cdot 2^c$, $a \geq 2, b \geq 1, c \geq 1$

$$(a+1)(b+1)(c+1) = 45 \Rightarrow$$

a+1	3	3	5
b+1	3	5	3
c+1	5	3	3

a	2	2	4
b	2	4	2
c	4	2	2

Deci numerele vor fi $3^2 5^2 2^4$; $3^2 5^4 2^2$; $3^4 5^2 2^2$; **1p**

Cel mai mic dintre ele este $3^2 5^2 2^4 = 3600$ **1p**

2. Numărul natural n dă restul 7 la împărţirea cu 44 şi restul 5 la împărţirea cu 42. Ce rest se obţine la împărţire cu 12?

Soluție:

$n = 44c_1 + 7$ și $n = 42c_2 + 5$ **2p**

$3n = 132c_1 + 21$ și $4n = 168c_2 + 20$ **2p**

Scazând cele două relaţii obţinem $n = M_{12} - 1 = M_{12} - 12 + 11$ **2p**

Restul r =11 **1p**

3. Considerăm triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC = 10cm$ şi unghiul A obtuz. Pe dreapta AB luăm punctul D astfel încât $(DB) \equiv (AB)$ cu $B \in (AD)$. Perpendiculara în punctul B pe AD întâlneşte dreapta CA în F. Stiind că $FD \perp BC$, calculaţi perimetrul triunghiului ADF.

Soluție:

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAŢIONALE
Inspectoratul Şcolar Judeţean Cluj
Colegiul Naţional „Andrei Mureşanu” Dej

Figura **1p**

Din congruenţa $\triangle ABF$ și $\triangle DBF$ rezultă că $[AF] \equiv [DF]$ **1p**

Fie $\{L\} = BC \cap DF$ .Notăm $m(\angle BDL) = x^\circ$, atunci $m(\angle FAD) = x^\circ$ și $m(\angle DBL) = 90^\circ - x^\circ$ **1p**

$m(\angle ABC) = m(\angle ACB) = 90^\circ - x^\circ$ și atunci $m(\angle BAC) = 2x^\circ$ **1p**

$m(\angle FAB) + m(\angle CAB) = 3x^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$ **1p**

Obţinem că $\triangle ADF$ echilateral **1p**

$P_{\triangle ADF} = 3AD = 3 \cdot 20 = 60$ cm **1p**

4. Bisectoarea unghiului A a triunghiului ABC intersectează pe $[BC]$ în D.
Considerăm punctele $M \in (AB)$ şi $N \in (AC)$ astfel încât $[BD] \equiv [BM]$ şi $[CN] \equiv [CD]$.
Dacă $AD \perp MN$, demonstraţi că:

a. $[MD] \equiv [ND]$;
b. $\angle BMD \equiv \angle CND$,
c. **triunghiul ABC este isoscel.**

Soluție:

Figura **1p**

a. Fie $AD \cap MN = \{O\}$ Din congruenţa triunghiurilor $\triangle AOM$ și $\triangle AON$ rezultă că $[AM] \equiv [AN]$ **1p**

Din congruenţa triunghiurilor $\triangle MOD$ și $\triangle NOD$ rezultă $[MD] \equiv [ND]$ **1p**

b. Din congruenţa triunghiurilor $\triangle AMD$ și $\triangle AND$ rezultă $\angle AMD \equiv \angle AND$ **1p**

Rezulta $\angle BMD \equiv \angle CND$ având același suplement **1p**

c. Din congruenţa triunghiurilor $\triangle BMD$ și $\triangle CND$ rezultă că $[BM] \equiv [CN]$ **1p**

$AB = AM + MB = AN + NC = AC$, deci triunghiul ABC este isoscel **1p**