MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
Inspectoratul Şcolar Judeţean Cluj
Colegiul Naţional „Andrei Mureşanu” Dej

Concursul Interjudeţean de Matematică
„Dumitru Ţiganetea”
Ediţia a XVII-a, 26 mai 2017

BAREME

Clasa a V a

1. a)Scrieţi în ordine crescătoare numerele :

$$a = 5^{3005} - 4 \cdot 5^{3004} - 5^{3003}$$
$$b = 2^{7011} - 2^{7010} - 2^{7009}$$
$$c = 3^{5008} - 2 \cdot 3^{5007} - 3^{5006} - 2 \cdot 3^{5005}$$

b) Folosind doar cifrele 2,0 şi 7 scrieţi numărul 2017 folosind 3 puteri ale lui numărului 2.

Soluţie:

1. a) $a = 5^{3003} \cdot 4,\ b = 2^{7007} \cdot 4,\ c = 3^{5005} \cdot 4$ 5p
$a < b < c$

b) $2017 = 2^{7+2^2} - 2^{7-2} + 2^0$ 2p

2. Se consideră numărul $n = 9 + 99 + \ldots + \underbrace{99\ldots9}_{2017\,ori}$ +2017.Să se arate că numărul n este divizibil cu 10.

Soluţie :
Avem 2017 termeni formaţi numai cu cifra 9.Atunci vom scrie
$n = (9+1) + (99+1) + \ldots + \left(\underbrace{99\ldots9}_{2017\,ori} + 1\right) = 10 + 100 + \ldots + 10\ldots0,$ care se divide cu 10 deorece fiecare termen se divide cu 10.

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
Inspectoratul Şcolar Judeţean Cluj
Colegiul Naţional „Andrei Mureşanu" Dej

Concursul Interjudeţean de Matematică
„Dumitru Ţiganetea"
Ediţia a XVII-a, 26 mai 2017

3. Determinaţi numerele naturale distincte $x_1, x_2, ..., x_{2016}$ pentru care avem:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_{2016}}=\frac{1}{2017^{2017}}.$$

Soluţie:

Luănd
$x_1 = n\cdot(n+1),\ x_2=(n+1)\cdot(n+2),\ldots,x_{2015}=(n+2014)\cdot(n+2015), x_{2016}=n+2016$ 1p

obtinem $\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}+\ldots+\frac{1}{(n+2015)\cdot(n+2016)}+\frac{1}{n+2016}=\frac{1}{2017^{2017}}$ 2p

$\Leftrightarrow \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+2015}-\frac{1}{n+2016}+\frac{1}{n+2016}=\frac{1}{2017^{2017}}$

2p

$\Leftrightarrow \frac{1}{n}=\frac{1}{2017^{2017}} \Leftrightarrow n = 2017^{2017}$

Atunci

$x_1 = 2017^{2017}\left(2017^{2017}+1\right)$

$x_2 = \left(2017^{2017}+1\right)\left(2017^{2017}+2\right)$

$\vdots$ 2p

$x_{2015} = \left(2017^{2017}+2014\right)\left(2017^{2017}+2015\right)$

$x_{2016} = 2017^{2017}+2016$

4. Arătaţi că pentru orice număr natural $n \geq 0$, numărul $16^n+8^n+4^{n+1}+2^{n+1}+4$ este un produs de două numere naturale, fiecare mai mare decât 4^n.

Soluţie

$16^n+8^n+4^{n+1}+2^{n+1}+4=4^{2n}+2\cdot4^n+2\cdot4^n+4+2^n\cdot4^n+2^n\cdot2=$

$4^n(4^n+2)+2(4^n+2)+2^n(4^n+2)=(4^n+2)(4^n+2^n+2)$,

de unde rezultă concluzia.

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
Inspectoratul Şcolar Judeţean Cluj
Colegiul Naţional „Andrei Mureşanu” Dej

Concursul Interjudeţean de Matematică
„Dumitru Ţiganetea”
Ediţia a XVII-a, 26 mai 2017

BAREME

Clasa a VI a

1. **Numărul** $n \in N$ **împărţit la 10 dă restul 4 și împărţit la 7 dă restul 5.**
   a) **Arătaţi că** $14 | n+2$
   b) **Arătaţi că** $2018 | 2017^n - 1$**.**

Soluţie

a) Conform teoremei împărţirii cu rest avem că $n = 10x + 4$ și $n = 7y + 5$.
Deducem ca $n + 2 = 10x + 6 = 7y + 7$, deci $14 | n+2$.

b) $2017^n - 1 = (2018 - 1)^n - 1 = M_{2018} + (-1)^n - 1 = M_{2018}$, deorece n este număr par.

2. Să se determine toate numerele naturale de două cifre de forma $\overline{ab}$ cu proprietăţile :
$\frac{a+2}{b+1} \in \mathbf{N}$ şi $\frac{b+3}{a+1} \in \mathbf{N}$.

prof. Gheorghe LOBONŢ, *Colegiul Naţional ,,Emil Racoviţă” Cluj-Napoca*

Soluţie:

Este necesar ca $b+1\le a+2$ şi $a+1\le b+3,$ deci $b\in\{a-2,a-1,a,a+1\}$.

(1) Pentru $b=a-2\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a+2}{a-1}\in\mathbf{N}\Rightarrow\dfrac{a+2}{a-1}=1+\dfrac{3}{a-2}\in\mathbf{N}\Rightarrow a-2\in\{1,3\}\\ \dfrac{a-2+3}{a-1}=\dfrac{a+1}{a-1}=1+\dfrac{2}{a-1}\in\mathbf{N}\Rightarrow a-1\in\{1,2\}\end{cases}\Rightarrow a\in\{3\}$

$\Rightarrow(a,b)=(3,1)$

(2)Pentru $b=a-1\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a+2}{a}\in\mathbf{N}\Rightarrow\dfrac{a+2}{a}=1+\dfrac{2}{a}\in\mathbf{N}\Rightarrow a\in\{1,2\}\\ \dfrac{a+2}{a+1}\in\mathbf{N}\Rightarrow\dfrac{a+2}{a+1}=1+\dfrac{1}{a+1}\in\mathbf{N}\Rightarrow a+1\in\{1\}\end{cases}\Rightarrow a\in\Phi$

(3)Pentru $b=a\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a+2}{a+1}\in\mathbf{N}\Rightarrow\dfrac{a+2}{a+1}=1+\dfrac{1}{a+1}\in\mathbf{N}\Rightarrow a+1\in\{1\}\\ \dfrac{a+3}{a+1}\in\mathbf{N}\Rightarrow\dfrac{a+3}{a+1}=1+\dfrac{2}{a+1}\in\mathbf{N}\Rightarrow a+1\in\{1,2\}\end{cases}\Rightarrow a=0$ dar nu convine

(4)Pentru $b=a+1\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a+2}{a+2}\in\mathbf{N}\Rightarrow 1\in\mathbf{N}\\ \dfrac{a+4}{a+2}\in\mathbf{N}\Rightarrow\dfrac{a+4}{a+2}=1+\dfrac{2}{a+2}\in\mathbf{N}\Rightarrow a+2\in\{1,2\}\end{cases}\Rightarrow a=0$ dar nu convine.

Prin urmare mulţimea soluţiilor este $\{31\}$.

3. Fie A_1,A_2,A_3,A_4 puncte coliniare în această ordine, B mijlocul lui (A_1A_2), C mijlocul lui (A_3A_4), D mijlocul lui (BC). Știind că $BC=3A_2A_3$, $A_2C=33$ cm, iar BA_2 şi CA_4 sunt direct proporţionale cu 2 şi 3, să se calculeze lungimile segmentelor: $A_1A_2, A_3A_4, BC, DA_4, A_1D, A_1A_4$.

Soluţie

Fie $A_1B=BA_2=a, A_3C=CA_4=b$ şi $A_2A_3=c$ ……………………………………………1p

Din $\dfrac{BA_2}{2}=\dfrac{CA_4}{3}\Rightarrow 3BA_2=2\cdot CA_4\Leftrightarrow 3a=2b$ (1)

Cum $BC=3A_2A_3\Rightarrow a+b+c=3c\Leftrightarrow a+b=2c$ (2)

Din $A_2C = 33 \Rightarrow b + c = 33$ (3) 1p

Din (1) avem $3a = 2b \Leftrightarrow 3a + 3b = 5b \Leftrightarrow 3(a+b) = 5b$ (4)

Din (4) şi (2) $\Rightarrow 3 \cdot 2c = 5b \Leftrightarrow 6c = 5b \Rightarrow b = \frac{6c}{5}$ (5)

Din (5) şi (3) $\Rightarrow \frac{6c}{5} + c = 33 \Leftrightarrow 11c = 5 \cdot 33 \Rightarrow c = 15$ (6) 1p

Din (3) $\Rightarrow b + c = 33 \Leftrightarrow b + 15 = 33 \Rightarrow b = 18$

Din (1) $\Rightarrow 3a = 2b \Leftrightarrow 3a = 2 \cdot 18 \Rightarrow a = 12$ 1p

Atunci $A_1A_2 = 2a = 24, A_3A_4 = 2b = 36$ 1p

$BC = BC = 3 \cdot c = 45$ $\quad DA_4 = DC + CA_4 = \frac{BC}{2} + b = \frac{45}{2} + 18 = 40{,}5$ 1p

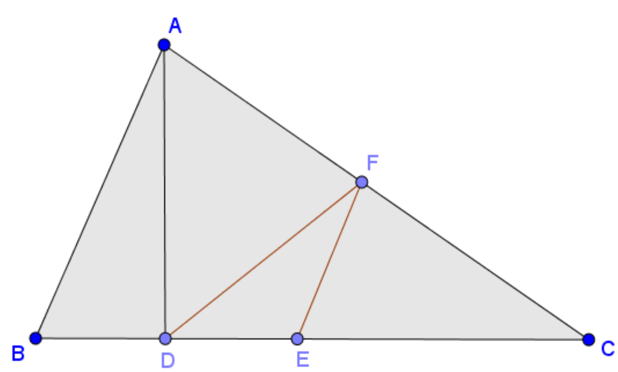
$A_1D = A_1B + BD = a + \frac{BC}{2} = 12 + \frac{45}{2} = 34{,}5$

$A_1A_4 = A_1D + DA_4 = 34{,}5 + 40{,}5 = 75\,(\text{cm})$ 1p

4. Fie triunghiul ascuţitunghic ΔABC, $m(\sphericalangle A) = 67°30'$ şi $m(\sphericalangle B) = 75°$. Demonstraţi că segmentul AB are lungimea egală cu dublul lungimii segmentului cuprins între piciorul perpendicularei duse din punctul A pe BC şi mijlocul laturii BC.

Prof. Cristian Petru POP, inspector matematică ISJ Cluj

Soluţie:



Fie F mijlocul laturii AC și E mijlocul laturii AB ⇒ EF linie mijlocie în Δ ABC ⇒ $EF = \frac{AB}{2}$ **(1 punct)**

$\Rightarrow m(\sphericalangle FEC) = m(\sphericalangle ABC) \Rightarrow m(\sphericalangle DFE) = 37^\circ 30'$ (1) **(2 puncte)**

Δ ADC, $m(\sphericalangle ADC) = 90^\circ$, DF mediană ⇒ $DF = \frac{AC}{2} = FC$ ⇒Δ FDC isoscel
(2 puncte)

$\Rightarrow m(\sphericalangle FDC) = m(\sphericalangle FCD) = 37^\circ 30'$ (2)

$\left.\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta$ DEF isoscel⇒ $DE = EF = \frac{AB}{2} \Rightarrow AB = 2DE$
(2 puncte)

BAREME

Clasa a IV a

1. **Aflati necunoscuta a din egalitatea**
$15950 - 3 \cdot \{17000 - [16000 - (31225 - 23225) : a]\} = 12890$.

Soluţie
Determinarea lui a=400.

2. **La intrarea în clasa pregătitoare Maria avea 6 ani, iar părintii ei aveau împreună 63 de ani..Dacă împărţim suma vărstelor actuale ale celor trei la vărstelor actuale ale celor trei la vârsta actuală a Mariei , obţinem cătul 8 și restul 1. Ce vârstă are acum Maria?**

Soluţie:
Fie 6+x vârsta actuală a Mariei.
Vârsta actuală a parinţilor este 63+2x.
Atunci $63+2x+6+x=8\cdot(6+x)+1$, de unde x=4, deci Maria are 10 ani.

3. Aflaţi numărul natural care se mareşte cu 18157, dacă adăugăm la dreapta lui cifra 4.
Soluție

Fie x numarul iniţial.Adăugând 4 la numărul iniţial obţinem 10x+4.
Diferenţa dintre numărul obţinut si cel iniţial este18157, deci $(10x+4)-x=18157$, de unde x=2017.

4.Fie suma $S=5+25+225+2225+\ldots+\underbrace{22\ldots25}_{2017\,cifre}$

a) Câte cifre are termenul din mijloc?
b) Câte cifre de 2 sunt în sumâ?
c)Care este penultima cifra a luiS?

Soluţie
a) avem 2017 termeni, cel din mijloc este al-1009-lea, care are 1009 cifre.
b) Termenul al 2017 are 2016 cifre de 2, așadar avem 0=1+2+...+2016=2033136 cifre de 2.
c) Grupăm termenii câte 4 de forma $(\ldots25+\ldots25+\ldots25+\ldots25)=\ldots00$.Cum $2017=4\cdot504+1$, rămâne un termen care nu intră în componenţa acestor grupuri de 4 .Ultimele 2 cifre ale lui S vor fi 05