MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE
Inspectoratul Şcolar Judeţean Cluj
Colegiul Naţional „Andrei Mureşanu” Dej

Concursul Interjudeţean de Matematică
„Dumitru Ţiganetea”
Ediţia a XVI-a, 14 mai 2016

Clasa a IV-a

1. a) Fie numerele *a* şi *b*.

$$a = [(270:9+5\times134):2\times8-1699]:3+3$$
$$b = [(116-49:7)\times7-419]:4-(16\times5+3)$$

Să se calculeze restul împărţirii lui *a* la întreitul lui *b*.

b) Să se calculeze:

$$(1+2+...+101)-1313:13$$

c) Determinaţi *x* din egalitatea:

$$2026-[3\times(1000-x)-11\times10]=2016$$

Soluţie:

a) a = $[(30+670):2\times8-1699]:3+3$

= $(700:2\times8-1699):3+3$

= $(350\times8-1699):3+3$

= $1101:3+3$

= $367+3$

= 370 **………………………………………………………………….... 1 punct**

b = $[(116-7)\times7-419]:4-83$

= $(109\times7-419):4-83$

= $(763-419):4-83$

= $344:4-83$

= 83 – 83

= 3 **…………………………………………………………………….... 1 punct**

$3b=9$ ……………………………………..…………………………….... **0.5 puncte**

$370:9=41 \;\; r1$ …………..…………………..……………………….... **0.25 puncte**

$r=1$ …………………………………………………………………...……**0.25 puncte**

b) $1+2+...+101=101\times102:2$ ……………………………………………...……**0.5 puncte**

$101\times102:2-101=101\times51-101$ ………………………………………...……**0.5 puncte**

101×50 ……………………………………………………..……………………**0.5 puncte**

5050 …………………...………………………………………..……………………**0.5 puncte**

c) $3\times(100-x)-11\times10=10$ ……………...……………………..……………………**0.5 puncte**

$3\times(1000-x)-120$ ……...………………......…………………..……………………**0.5 puncte**

$1000-x=40$ ……….………………….......………………….……………………**0.5 puncte**

$x=960$ …………..…………………......…………………..……………………**0.5 puncte**

2. Suma a *2* numere este *196*. Dacă ştergem o cifră a unuia dintre numere îl obţinem pe celălalt. Găsiţi perechile de numere cu această proprietate.

Soluţie:

Fiindcă suma este 196 şi, dacă se şterge o cifră de la un număr, se obţine celălalt, rezultă că unul dintre numere este de 3 cifre şi incepe cu 1, iar celălalt are 2 cifre .... **1 punct**

Avem situaţiile:

a) $\overline{1bc}+\overline{1b}=196 \Rightarrow b=7; c=9$ şi scrie soluţia .... **2 puncte**

b) $\overline{1bc}+\overline{1c}=196 \Rightarrow b=8; c=3$ şi $b=7; c=8$ şi scrie soluţia .... **2 puncte**

c) $\overline{1bc}+\overline{bc}=196 \Rightarrow b=4; c=8$ şi scrie soluţia.. **2 puncte**

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE
Inspectoratul Şcolar Judeţean Cluj
Colegiul Naţional „Andrei Mureşanu” Dej

3. **Produsul a *24* numere naturale este *24*. Aflaţi cea mai mică sumă a celor *24* numere.**

Soluţie:

Avem situaţiile:

1) $24 = 24\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{23}$, Suma numerelor este $24+23=47$ ……………………..……….... **1 punct**

2) $24 = 2\cdot 12\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{22}$, Suma numerelor este $2+12+22=36$ …………………........... **1 punct**

3) $24 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{20}$, Suma numerelor este $3\bullet 2+3+20=29$ …………................ **1 punct**

4) $24 = 3\cdot 8\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{22}$, Suma numerelor este $8+3+22=33$ …………………………….... **1 punct**

5) $24 = 4\cdot 6\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{22}$, Suma numerelor este $4+6+22=32$ ………………...........…..... **1 punct**

6) $24 = 4\cdot 2\cdot 3\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{21}$, Suma numerelor este 30 ……………………………………..... **1 punct**

7) $24 = 2\cdot 2\cdot 6\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{21}$, Suma numerelor este 31 ……... **1 punct**

4. **Să se arate că oricare ar fi şase numere impare, diferite, există cel puţin două numere a căror diferenţă se împarte exact la *10*.**

Soluţie:

Un număr impar are ultima cifră: 1, 3, 5, 7, 9 ………………………..…...………… **2 puncte**

Având 6 numere (şi cinci cazuri) două dintre ele se vor termina cu aceeaşi cifră ...... **3 puncte**

Făcând diferenţa vom obţine un număr care se termină cu 0, deci se împarte la 10….**2 puncte**

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE
Inspectoratul Şcolar Judeţean Cluj
Colegiul Naţional „Andrei Mureşanu” Dej

Concursul Interjudeţean de Matematică
„Dumitru Ţiganetea”
Ediţia a XVI-a, 14 mai 2016

Clasa a V-a

1. Fie numărul $x=\left[16^{12}:64^3+\left(3^5\right)^4-(2\cdot 3)^{47}:6^{37}\right]-\left[2^{10}\cdot 3^{10}-\left(2^{10}\right)^3+\left(3^{10}\right)^2\right]$**.**

a) Să se determine numărul x**.**

b) Să se arate că x **este divizibil cu numărul 1024.**

Soluţie:

a) $x=2^{11}\left(2^{20}-3^{10}\right)$……………..……………………………………..………………...**5 puncte**

b) $x=2^{10}\cdot 2\left(2^{20}-3^{10}\right)\vdots 1024$ ………………………………………………………….**2 puncte**

2. Să se verifice dacă există numerele naturale prime a,b,c**, astfel încât suma**

$\frac{\overline{1a}}{4\cdot 12}+\frac{\overline{bc}}{8\cdot 9}+\frac{5c}{18\cdot 4}$ **să reprezinte o fracţie echiunitară.**

Soluţie:

Suma se scrie

$\frac{10+a}{2^4\cdot 3}+\frac{10b+c}{2^3\cdot 3^2}+\frac{5c}{2^3\cdot 3^2}=\frac{30+3a+20b+12c}{2^4\cdot 3^2}\Rightarrow 3a+20b+12c+30=144$…………… **4 puncte**

Din $3a+20b+12c=114\Rightarrow a=2$ apoi $b=3$ şi $c=4$ care nu este prim, deci nu există numere cu proprietatea din enunţ. ………………………………………………………….……………. **3 puncte**

3. Se consideră n **numere naturale consecutive. Suma resturilor împărţirii celor** n **numere la 9, este 302. Aflaţi valorile posibile ale lui** n**.**

Soluţie:

Numerele fiind consecutive, rezultă că şi resturile obţinute la împărţirea cu 9 vor fi consecutive **……………………………………………………………………………………………2 puncte**

Resturile la împărţirea cu 9 sunt: $0,1,2,3,4,5,6,7,8$ şi au suma 36 **………..……………… 1 punct**

Suma resturilor se poate scrie $302 = 36 \cdot 8 + 14$. Rezultă că în şir sunt 8 grupe complete de 9 numere consecutive şi câteva numere cu suma resturilor 14 **…………………….………………... 2 puncte**

În mulţimea $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$, verificăm existenţa unor grupuri de resturi consecutive cu suma 14.
Avem a) $2+3+4+5=14$ şi atunci şirul are $8 \cdot 9 + 4 = 76$ (termeni**) ……………………….. 1 punct**
b) $8+0+1+2+3=14$ şi atunci şirul are $8 \cdot 9 + 5 = 77$ termini **…………..………. 1 punct**
Deci $n \in \{76,77\}$.

4. Să se arate că: $45 < \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2024}{2023} < 2025$

Soluţie:

Pentru **a doua inegalitate**, notăm

$M = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2023}{2024}$. Avem: $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}, \frac{3}{4} > \frac{3}{5}, \frac{5}{6} > \frac{5}{7}, \ldots, \frac{2023}{2024} > \frac{2023}{2025}$.

Înmulţind membru cu membru inegalităţile de mai sus, obţinem

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2023}{2024} > \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2023}{2025}$$

Aceasta se mai scrsie

$M > \frac{1}{2025}$, de unde $\frac{1}{M} < 2025 \Leftrightarrow \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2024}{2023} < 2025$**……………………….…..4 puncte**

Pentru **prima inegalitate**, înmulţim inegalităţile evidente $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}, \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \frac{5}{6} < \frac{6}{7}, \ldots, \frac{2023}{2024} < \frac{2024}{2025}$,

rezultă $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2023}{2024} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2024}{2025}$

$$\Leftrightarrow M < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2024}{2025} \Leftrightarrow M < \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2024}{2023}\right) \cdot \frac{1}{2025} \Leftrightarrow M < \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{2025} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{M^2} > 2025 \Leftrightarrow \frac{1}{M^2} > 45^2, \text{ de unde } \frac{1}{M} > 45 \Leftrightarrow$$

$45 < \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2024}{2023}$ **…………………………………………………………….…………3 puncte**

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE
Inspectoratul Şcolar Judeţean Cluj
Colegiul Naţional „Andrei Mureşanu” Dej

Concursul Interjudeţean de Matematică
„Dumitru Ţiganetea”
Ediţia a XVI-a, 14 mai 2016

Clasa a VI-a

1. a) Să se determine media aritmetică a numerelor *x, y, z* ştiind că *x-3, y-2, z+4* sunt direct proporţionale cu 2, 5, 6 şi *2x + 4y -3z = 2016*.

b) Să se determine numerele întregi *x, y* pentru care *xy + 3x – 2y = 13*

Soluţie:

a) $\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{5}=\frac{z+4}{6}=k$ ……………………….………………………………… **1 punct**

$x=2k+3$
$y=5k+2$ ……………………………………..………………………**1 punct**
$z=6k-4$

$2(2k+3)+4(5k+2)-3(6k-4)=2016$
$k=\frac{995}{3}$ ……………………………………………….**1 punct**

$x=\frac{1993}{3}, y=\frac{4981}{3}, z=1986$ …………..……………………………………... **0.5 puncte**

$M_a=\frac{12938}{3}$ ……………………………………………………………….…… **0.5 puncte**

b) Relaţia se poate scrie:

$(x-2)(y+3)=7$ …….……………………………………………………...…… **1 punct**

$x=3, y=4$
$x=9, y=-2$ ………………………………………………..…………..…… **1 punct**

$x=1, y=-10$
$x=-5, y=-4$ **…………………………………………………………………… 1 punct**

2. Fie $\triangle ABC$ cu $AB=AC$. Fie $D\in(AB), E\in(AC)$ astfel încât $AD=AE$. Fie *P* mijlocul lui *(BC)*, *M* mijlocul lui *(DE)* şi fie $BE\cap CD=\{N\}$. Să se demonstreze că:

a) *NB = NC*

b) $NM\perp DE$

c) *M, N, P coliniare*

Soluţie:

Figura **……………………………………………………………………………1 punct**

a) $\triangle ABE\equiv\triangle ACD(L.U.L.)\Rightarrow m(\angle ABE)=m(\angle ACD)$ **……………………………………1 punct**

$\triangle ABC$ isoscel, $\Rightarrow m(\angle B)=m(\angle C)\Rightarrow m(\angle EBC)=m(\angle DCB)\Rightarrow\triangle BNC$ isoscel **…….1 punct**

b) $\triangle BDN\equiv\triangle CEN(U.L.U.)\Rightarrow[ND]\equiv[NE]\Rightarrow\triangle NDE$ isoscel **………………………………..1 punct**

MN mediană $\Rightarrow MN$ înălţime $\Rightarrow$ $MN\perp DE$ **……………………………………………..1 punct**

c) În $\triangle BNC$ isoscel, MN mediană $\Rightarrow$ NP înălţime $\Rightarrow NP\perp BC$, apoi se arată

$DE\parallel BC$ **………………………………………………………………………..1 punct**

Din $MN\perp DE$, $NP\perp BC$, $DE\parallel BC\Rightarrow$ *M, N, P* coliniare**…………………………..1 punct**

3. În $\triangle ABC$, $m(\angle B)=29^\circ$, $m(\angle C)=58^\circ$. Fie $M\in(BC)$ astfel încât $(BM)\equiv(AC)$. Calculaţi $m(\angle AMB)$

Soluţie:

Figura **……………………………………………………………………………1 punct**

Fie $D\in(BC)$ astfel încât B,C,D coliniare în această ordine cu $(CD)\equiv(AC)$ **…………..1 punct**

$\triangle ACD$ isoscel cu $m(\angle CAD)=m(\angle CDA)=29^\circ$ **………………………………………1 punct**

Obţinem că $\triangle ABD$ isoscel cu $m(\angle ABD)=m(\angle ADB)=29^\circ$ de unde $(AB)\equiv(AD)$ **……..1 punct**

Atunci $\triangle ABM \equiv \triangle ADC$ $(L.U.L)$ **...1 punct**

Din $(AB) \equiv (AD), \angle ABD \equiv \angle ADB$ şi $(BM) \equiv (AC) \equiv (CD)$ $\Rightarrow \angle BAM \equiv \angle DAC$ (29°) **.....1 punct**

Cum $\angle AMC$ exterior $\triangle ABM \Rightarrow m(\angle AMC) = 29^\circ + 29^\circ = 58^\circ$ **,** $m(\angle AMB) = 122^\circ$ **.......1 punct**

4. Ionel vrea să aleagă câteva numere distincte din mulţimea $M = \{2,3,4,\ldots,111\}$, astfel încât fiecare dintre numerele alese să nu fie produsul al altor două numere alese. Să se determine numărul maxim de numere pe care Ionel le poate alege.

Soluţie:

În primul rând observăm că este posibil ca Ionel să aleagă 101 numere cu proprietatea dorită: 11, 12, …,111, deoarece avem $11 \times 12 > 111$. Arătăm că 101 este numărul maxim**.............1 punct**

Presupunem că Ionel a ales k numere. Fie d cel mai mic dintre numerele alese. Este clar că dacă $d \geq 11$, atunci avem $k \leq 101$ **..1 punct**

Dacă $2 \leq d \leq 6$, atunci din fiecare din cele 9 mulţimi $\{9,9d\},\{10,10d\},\ldots,\{17,17d\}$, Ionel poate alege cel mult un număr. Deoarece $9d > 17$, rezultă că aceste mulţimi sunt disjuncte două câte două.
... 1 punct

Cum $17d \leq 102$, rezultă că există cel puţin 9 numere între 9 şi 102 pe care Ionel nu le poate alege. Prin urmare $k \leq 101$ **...1 punct**

Dacă $3 \leq d \leq 10$, atunci din fiecare din mulţimile $\{d+1, d(d+1)\}$, $\{d+2, d(d+2)\}, \ldots, \{11, 11d\}$, Ionel poate alege cel mult un element. **...1 punct**

Deoarece $d(d+1) \geq 12$, aceste mulţimi sunt disjuncte două câte două. Cum $11d < 111$, rezultă că există cel puţin $11-d$ numere din aceste mulţimi pe care Ionel nu le poate alege. **.............1 punct**

Dar Ionel nu a ales numerele $2,\ldots,d-1$ (care nu sunt în mulţimile de mai sus), prin urmare nu a ales cel puţin $11-d+d-2=9$ numere.

Rezultă din nou $k \leq 101$. Răspunsul căutat este 101. **...1 punct**