MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE
Inspectoratul Şcolar Judeţean Cluj
Colegiul Naţional „Andrei Mureşanu" Dej

Concursul Interjudeţean de Matematică
„Dumitru Ţiganetea"
Ediţia a XV-a, 23 mai 2015
Barem Clasa a IV – a

1. a) Efectuați $50+225:5\times\{[824:4-90:3+(324\times 0+64:2):8]:18\}+99:9\times 9-66:6\times 6$

b) Determinaţi termenul necunoscut din egalitatea

$$2015-\{2015:5-(x-5):5\}=2014$$

Soluţie si barem

(4 pct) a) 533

(3 pct) b)

$2015:5-(x-5):5=1$

$403-(x-5):5=1$

$(x-5):5=402$,

$x=2015$

2. Aflaţi numărul cifrelor numărului $A=1828838884\ 8888\ldots 2015$

Soluţie

(2 pct) După 1 apare o cifră de 8, după 2 apar 2 cifre de 8, după 3 apar 3 cifre de 8,…,după 2014 apar 2014 cifre de 8

(1 pct) Atunci numărul cifrelor de 8 este $1+2+3+\cdots+2014=(2014\cdot 2015):2=2029105$

(1 pct) De la 1 la 9 sunt 9 cifre

(1 pct) De la 10 la 99 sunt $90\cdot 2=180$ cifre

(1 pct) De la 100 la 999 sunt $900\cdot 3=2700$ cifre

(1 pct) De la 1000 la 2015 sunt 1016·4=4064 cifre. Prin urmare numărul cifrelor lui A este

(1 pct) 2029105+9+180+2700+4064=2036058

3. Să se arate că numărul 2025 se poate scrie ca suma a trei termeni astfel încât fiecare termen să fie cu 2 mai mare decât triplul numărului precedent

Soluţie

(1 pct) Fie x cel mai mic dintre numere. Al doilea este $3x+2$,

(2 pct) Al treilea număr este $3\cdot(3x+2)+2=9x+8$.

(3 pct) Suma lor este $x+(3x+2)+(9x+8)=2025$. $13x+10=2025$. $x=155$

(1 pct) Numerele sunt $155,\ 155\cdot 3+2,\ 9\cdot 155+8$, adică 155, 467, 1403

4. Se consideră şirul: $\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{1}{2},\frac{3}{1},\frac{2}{2},\frac{1}{3},\frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\ldots$ **Al câtelea termen al şirului este** $\frac{21}{35}$

Soluţie

(2 pct) Grupăm termenii şirului, astfel încâtîn fiecare grupă să intre fracţiile pentru care suma dintre numărător şi numitor este aceeaşi.

(1 pct) Prima grupă conţine $\frac{1}{1}$, a doua $\frac{2}{1},\frac{1}{2}$, a treia $\frac{3}{1},\frac{2}{2},\frac{1}{3},\ldots$

(1 pct) Termenul $\frac{21}{35}$ se află în grupa pentru care suma dintre numărător şi numitor este $21+35=56$

(2 pct) Până la această grupă sunt: $1+2+3+\cdots+54=(54\cdot 55):2=1485$ termeni .

(1 pct) Termenul $\frac{21}{35}$ ocupă în grupa din care face parte locul 35. În şirul considerat termenul $\frac{21}{35}$ ocupă locul 1485+35=1520.

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE
Inspectoratul Şcolar Judeţean Cluj
Colegiul Naţional „Andrei Mureşanu” Dej

Concursul Interjudeţean de Matematică
„Dumitru Ţiganetea”
Ediţia a XV-a, 23 mai 2015

Barem, Clasa a V-a

1.

a) Să se calculeze $\left[\left(3^2\right)^2\right]^2 : 3^{2^2} \cdot \left(2^3 + 2^0\right) : \left(37 \cdot 10^2 - 3673\right) : \left(10^3 - 3^2 \cdot 111\right)$

b) Arătaţi că numărul $N = 2014 + \overline{abc6} + \overline{bca7} + \overline{cab8}$ **este divizibil cu 185, oricare ar fi** a, b, c **cifre nenule în baza 10.**

Soluţie
(3 pct) a) Rezultatul este 3^3.

b) Folosind descompunerea în baza 10, avem:
(3 pct) $N = 2014 + 1000a + 100b + 10c + 6 + 1000b + 100c + 10a + 7 + 1000c + 100a + 10b + 8$.
(1 pct) $N = 2035 + 1110\left(a + b + c\right) = 185 \cdot \left(11 + 6a + 6b + 6c\right) \vdots 185$

2. Calculaţi suma $S = 6 + 92 + 988 + \cdots + \underbrace{999...600}_{100 cifre}$

Soluţie
(4 pct) Observăm că

$$6 = 10 - 4 \cdot 1;$$
$$92 = 100 - 4 \cdot 2$$
$$998 = 1000 - 4 \cdot 3$$
$$\vdots$$

(3 pct) Deci $S = 10 + 100 + 1000 + \cdots + \underset{100}{10...0} - 4\left(1 + 2 + \cdots + 100\right) = \underset{100}{11...0} - 20200 = \underbrace{111...1090910}_{100}$

3. Să se arate că numărul $A = \dfrac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + 2014 \cdot 2015}{1^2 + 2^2 + \cdots + 1007^2}$ **este cub perfect.**

Soluţie

(4 pct) Numărătorul are 2014 termeni pe care îi grupăm câte doi astfel:

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 2(1+3) = 2 \cdot 2^2$

$3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 4(3+5) = 2 \cdot 4^2$

$5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 = 6(5+7) = 2 \cdot 6^2$

...

$2013 \cdot 2014 + 2014 \cdot 2015 = 2 \cdot 2014^2$

*(3 pct)*Atunci $A = \dfrac{2 \cdot \left(2^2 + 4^2 + \cdots + 2014^2\right)}{1^2 + 2^2 + \cdots + 1007^2} = \dfrac{2 \cdot 2^2 \cdot \left(1^2 + 2^2 + \cdots 1007^2\right)}{1^2 + 2^2 + \cdots + 1007^2} = 8$

4. Pe o tablă sunt scrise numerele: 1,2,3,…,2014,2015. Ştergem două numere şi în locul lor scriem restul împărţirii sumei lor la 31. După câţiva paşi rămân scrise pe tablă două numere, dintre care unul este 899. Care este cel de-al doilea număr dintre cele două rămase pe tablă (justificaţi)

Soluţie

(1 pct) Suma $1 + 2 + 3 + \cdots + 2015 = 2015 \cdot 1008$ este divizibilă cu 31. $(2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31)$.

*(3 pct)*Prin ştergerea a două numere şi înlocuirea lor cu restul împărţirii la 31, ceea ce nu se modifică este restul împărţirii sumei lor la 15. $(x + y = 31q + r)$.

(1 pct) Prin ştergere, obţinem:
$1 + 2 + \cdots + 2015 - (x + y) + r = 2015 \cdot 1008 - (31 \cdot q + r) + r = 31 \cdot (5 \cdot 13 \cdot 1008 - q) \,\vdots\, 31$, atunci şi suma ultimelor două numere rămase se divide cu 31.

(1 pct) Dacă a şi 899 sunt ultimele două numere rămase, cum 899 se divide cu 31, trebuie ca şi a să se dividă cu 31.

(1 pct) Numărul 899 nu poate fi rest la împărţirea cu 31, atunci a trebuie dă fie acest rest şi deci $a \in \{0,1,2,\ldots,30\}$. Deoarece a se divide cu 31, deducem că $a = 0$.

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE
Inspectoratul Şcolar Judeţean Cluj
Colegiul Naţional „Andrei Mureşanu” Dej

Concursul Interjudeţean de Matematică
„Dumitru Ţiganetea”
Ediţia a XV-a, 23 mai 2015
Barem, Clasa a VI-a

1. a) Să se calculeze valoarea lui x din proporția:

$$\frac{1+2+\ldots+2016}{2016-2015+2014-2013+\ldots+4-3+2-1}=\frac{x}{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{2015\cdot 2016}}$$

și să se determine partea întreagă a lui x.

b) La Concursul Interjudețean “Dumitru Tiganetea” , toți elevii au fost recompensați astfel: 10% din numărul concurenților au primit premiul I ; 20% din restul concurenților au primit premiul II; 25% din rest au primit premiul III, 36 de elevi au primit mențiuni și ultimii 45 au primit diplomă de participare.

a) Câți elevi au fost la concurs?
b) Câți elevi au primit premiul I?

Soluție
a)

$(0.5pct)\, 1+2+\ldots+2016=2017\cdot 1008$

$(0.5pct)\, 2016-2015+2014-2013+\ldots 4-3+2-1=1008$

$(1pct)\, \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{2015\cdot 2016}=\frac{2015}{2016}$

Aflarea lui $(2pct)\, x=\frac{2015\cdot 2017}{2016}$.Finalizare $(1pct)\,[x]=2015$.

b)Fie x numărul de elevi participanți.

(0.5 pct) Prima zi $\frac{1}{10}x$

*(0.5 pct)*A doua zi $\frac{9}{50}x$

(0.5 pct) A treia zi $\frac{9}{50}x$

(1 pct) $\frac{1}{10}x+\frac{9}{50}x+\frac{9}{50}x+51=x$

(1 pct) $x = 150$ participanți
(0.5 pct) 15 elevi au luat premiul I

2. Fie triunghiul isoscel ABC **ABC cu** $[AB] \equiv [AC]$ **și** $m(\angle A) = 40^\circ$**.Se consideră punctele** $D \in (AB)$ **astfel încât** $m(\angle BCD) = 55^\circ$ **și** $E \in (AC)$ **astfel încât** $m(\angle DBE) = 30^\circ$**.**

Să se arate că :

a)Triunghiul BCD **este isoscel**
b) Triunghiul BEC **este isoscel**
c) Calculați măsura unghiului EDC

Soluție:

(1pct) $m(\angle B) = m(\angle C) = 70^\circ$

(2pct) $m(\angle BDC) = 55^\circ = m(\angle C)$ de unde triunghiul BCD isoscel. (1)

(2pct) $m(\angle EBC) = 40^\circ, m(\angle BEC) = 70^\circ = m(\angle C)$ de unde triunghiul BCE isoscel. (2)

(1pct) Din (1) și (2) obținem că triunghiul BDE isoscel , deci $m(\angle BDE) = 75^\circ$.

(1pct) Astfel $m(\angle EDC) = 20^\circ$.

3. Se consideră triunghiul ABC **cu** $m(\angle ABC) > 90^\circ$**.Pe mediana** AM **se consideră punctul** R **astfel încât** $AR = 10$**. Dacă** $BE \perp AM, E \in AM$ **și** $ME = 5$**. Să se arate că** $[AB] \equiv [RC]$**.**

Soluție

(1 pct) Fie $F \in (AM)$ astfel încât E să fie mijlocul segmentului MF.

(2 pct) Atunci $EF = 5$ și deducem că triunghiul BFM isoscel cu $[BM] \equiv [BF]$

(2 pct) Deducem că $m(\angle BFM) = m(\angle BMF)$, de unde $m(\angle AFB) = m(\angle CMR)$.

(2 pct) Din congruenta $\triangle ABF \equiv \triangle RCM$ $(L.U.L)$ deducem $[AB] \equiv [RC]$

4. Dacă a **și** b **sunt numere naturale astfel încât** $\frac{a}{b} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015}$ **.Să se arate că** a **se divide cu 3023.**

Soluție:

(4 pct)

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE
Inspectoratul Şcolar Judeţean Cluj
Colegiul Naţional „Andrei Mureşanu” Dej

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2014}+\frac{1}{2015}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2014}+\frac{1}{2015}-2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2014}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2014}+\frac{1}{2015}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{1007}\right)=\frac{1}{1008}+\frac{1}{1009}+\ldots+\frac{1}{2015}=$$

$$=\left(\frac{1}{1008}+\frac{1}{2015}\right)+\left(\frac{1}{1009}+\frac{1}{2014}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{1511}+\frac{1}{1512}\right)=$$

$$=3023\cdot\left(\frac{1}{1008\cdot 2015}+\frac{1}{1009\cdot 2014}+\ldots+\frac{1}{1511\cdot 1512}\right)$$

(1 pct) Aducând la același numitor, putem scrie $\frac{a}{b}=\frac{3023\cdot x}{1008\cdot 1009\cdot\ldots\cdot 2015}, x\in N$. *(1 pct)*

(2 pct) Deoarece 3023 număr prim și c.m.m.m.c-ul factorilor de la numitor nu este multiplu de 3023, deducem că a se divide cu 3023.