Ministerul Educaţiei Naţionale
Inspectoratul Şcolar Judeţean Cluj
Colegiul Naţional „Andrei Mureşanu" Dej

Concursul Interjudeţean de Matematică
„Dumitru Ţiganetea"
Ediţia a XIV-a, 26 aprilie 2014
Clasa a VI a

1. Să se afle numerele raţionale x, y, z ştiind că x şi y sunt direct proporţionale cu 2 şi 3 , y şi z sunt invers proprţionale cu 0,25 şi 0,2 iar $4x+5y+\frac{4z}{3}=84$

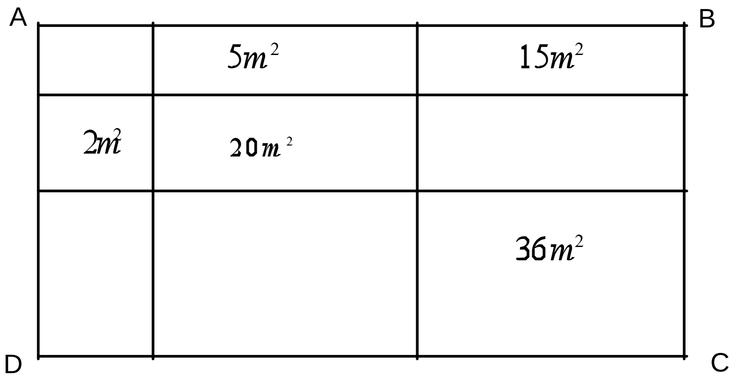
   Prof. Dragos Corina ,Prof.Galdean Alina

2. Determinaţi numerele naturale , nenule a şi b care satisfac relaţia

   $$63a^2+62a+46=(7a+3)(b+1)$$

   Prof.Vasile Serdean, Prof. Anca Cristina Hodorogea

3. In figura de mai jos , dreptunghiul ABCD a fost împărţit în dreptunghiuri cu ariiile de 5 m^2, 15 m^2, 2 m^2,20 m^2 şi 36 m^2 .Calculaţi aria dreptunghiului ABCD.



Prof.Camelia Magdas, Prof.Eugen Jecan

4. Se consideră triunghiul ABC în care $m(\measuredangle B)=40^\circ$ şi $m(\measuredangle C)=30^\circ$. Pe latura (BC) se consideră punctele D şi E , astfel încât $m(\measuredangle DAB)=40^\circ$ şi $m(\measuredangle EAC)=30^\circ$. Fie G intersecţia paralelei prin D la dreapta AB cu latura (AC) .Dacă $\{J\}=AE\cap BG$, arătaţi că $[JB]=[JC]$.

   Gazeta Matematica

"Învăţând matematica, înveţi să gândeşti"
Grigore C.Moisil

Ministerul Educaţiei Naţionale
Inspectoratul Şcolar Judeţean Cluj
Colegiul Naţional „Andrei Mureşanu" Dej

Concursul Interjudeţean de Matematică „Dumitru Ţiganetea"
Ediţia a XIV-a, 26 aprilie 2014
Clasa a V a

1. a)Arătaţi că numărul $A=\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$ este divizibil cu 37

   b) Dacă $\overline{3ab}+\overline{b4a}+\overline{ab2}=1341$, arătaţi $\overline{ab}\,\vdots\,9$.

   Prof. Zoltan Fodor, Prof.Dragos Corina

2. Se consideră numărul $A=201\cdot 2^{n+1}\cdot 15^{n}-6^{n}\cdot 5^{n+1}+3^{n+1}\cdot 10^{n}$, $n\in N^{*}$. Să se determine n ştiind că A se termină cu 2016 zerouri.

   Prof.Pop Cristian, Prof.Alina Galdean

3. a) Să se afle cifrele a, b şi numărul natural n pentru care $2014=a^{n}+\overline{bb0}$.

   b) Să se afle $x\in N$ ştiind că $1+3+5+\ldots+x=49^{2014}$.

   Prof.Vasile Serdean, Prof.Camelia Magdas

4. Se consideră fracţiile $\frac{1}{n}$ şi $\frac{1}{n^{2}}$, $n\in N^{*}$ .Să se determine cel mai mic n ştiind că între cele două fracţii există 35 fracţii diferite cu numărătorul 3
   Determinaţi aceste fracţii.

   Prof.Cristian Pop, Prof. Eugen Jecan

"Învăţând matematica, înveţi să gândeşti"
Grigore C.Moisil

Ministerul Educaţiei Naţionale
Inspectoratul Şcolar Judeţean Cluj
Colegiul Naţional „Andrei Mureşanu” Dej

Concursul Interjudeţean de Matematică „Dumitru Ţiganetea”
Ediţia a XIV-a, 26 aprilie 2014
Clasa a IV a

1. a) Care este cel mai mic număr de trei cifre în a cărui scriere nu apare cifra 1?
   b) Câte numere impare mai mici decât 100 au cifra zecilor 7.
   c) Care este cel mai mare număr par scris cu patru cifre diferite?

***

2. Aflaţi valoarea numerică a lui x din $10 \cdot \{x - 10 \cdot [36 + 10 \cdot (24 + 2014 : 2014)]\} = 100$

Inv.Dana Muresan

3. Suma a trei numere naturale este 118. Dacă din primul număr luăm 12, la al doilea număr adăugăm 3 şi din al treilea număr luăm 16 obţinem trei numere naturale consecutive (în această ordine). Aflati numerele.

Prof.Vasile Serdean, Prof. Camelia Magdas

4. Completaţi următoarele pătrate “magice” (suma elementelor de pe linie, coloană şi diagonale este aceeaşi)

8		
	5	
	9	2

	21	14
		19
20		

***

“Învăţând matematica, înveţi să gândeşti”
Grigore C.Moisil

BAREME-cls a VI a

1. Avem $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$ şi $\frac{y}{4}=\frac{z}{5}$ **2 pct**

$\frac{x}{8}=\frac{y}{12}=\frac{z}{15}=k \Rightarrow x=8k, y=12k, z=15k$ **3pct**

$4\cdot 8k+5\cdot 12k+\frac{4}{3}\cdot 15k=84 \Rightarrow k=\frac{3}{4}$ **1pct**

Se obţine $x=6, y=9, z=\frac{45}{4}$ **1pct.**

2. Soluţie 1.

Din $a,b\in N^* \Rightarrow 63a^2+62a+46,\ 7a+3,\ b+1\in N^*$

Atunci $7a+3 | 63a^2+62a+46$ **(2pct)** , dar $7a+3 | 9a(7a+3)$, de unde

$7a+3 | 35a+46$ **(2pct)**.

Se obţine $7a+3|41$ **(1pct)**, de unde $a=4$. **(1pct)**

Pentru $a=4$, relaţia devine $b+1=42$, adică $b=41$. **(1pct)**

Soluţia este $(a,b)\in\{(4,41)\}$.

Soluţie 2.

Se efectuează calculele şi se obţine $63a^2+55a+43=b\cdot(7a+3)$, **(2pct)**, de unde

$b=\frac{63a^2+55a+43}{7a+3} \Leftrightarrow b=\frac{9a(7a+3)+4(7a+3)+31}{7a+3}=9a+4+\frac{31}{7a+3}$. **(3pct)**, Dar

$b\in N^* \Rightarrow 7a+3=31 \Leftrightarrow a=4$ şi $b=41$ **(2pct)**,

Soluţia este $(a,b)\in\{(4,41)\}$.

3. Notăm cu a,b,c,x,y,z dimensiunile dreptunghiurilor , şi calculăm ariile acestora.

Obţinem $b\cdot x=5$ şi $c\cdot x=15$, de unde $\frac{c}{b}=3$, adică $c=3b$.(1) **1pct**

Analog $a\cdot y=2$ şi $b\cdot y=20$, de unde $\frac{b}{a}=10$, adică $b=10\cdot a$ (2). **1pct**

Din relaţiile (1) şi (2) obţinem $c=30\cdot a$.(3) **1pct**

Din (2) şi (3) , avem că $a+b+c=41a$ (4). **1pct**

Din $z\cdot c=36$ şi $c=3\cdot b \Rightarrow z\cdot 3b=36 \Rightarrow z\cdot b=12 \Rightarrow z\cdot 10a=12 \Leftrightarrow z\cdot a=1,2$ **1pct**

Din $b\cdot x=5$ şi $b=10\cdot a \Rightarrow x\cdot 10a=5 \Leftrightarrow a\cdot x=0,5$. **1pct**

$A_{ABCD}=(a+b+c)(x+y+z)=41\cdot a\cdot(x+y+z)$
$=41\cdot a\cdot x+41\cdot a\cdot y+41\cdot a\cdot z=41\cdot 0,5+41\cdot 2+41\cdot 1,2=151,7cm^2$ **1pct**

4. Se arată că $m(\measuredangle BAC)=110^\circ, m(\measuredangle DAE)=40^\circ$ $m(\measuredangle DGA)=70^\circ$ ($\measuredangle DGA$ şi $\measuredangle BAC$ sunt interne de aceeasi parte a secantei) , $m(\measuredangle GDB)=140^\circ$ (analog). **1pct**

Deorece $m(\measuredangle DGA)=m(\measuredangle DAG)=70^\circ$ obţinem că triunghiul DGA este isoscel cu $[DA]=[DG]$ **1pct**

Analog triunghiul DBA este isoscel cu $[DA]=[DB]$. **1pct**

Astfel că triunghiul DGB este isoscel, deci $m(\measuredangle JBC)=m(\measuredangle DGB)=\frac{180^\circ-140^\circ}{2}=20^\circ$ **1pct**

Construim BB' astfel încât $m(\measuredangle CBB')=30^\circ$ şi $B'\in AC$. **1pct**

Atunci $m(\measuredangle GBB')=10^\circ$ şi $m(\measuredangle ABB')=10^\circ$, de unde BB' bisectoare în triunghiul isoscel BAJ .Atunci BB' este mediatoarea segmentului AJ , deci triunghiul $B'AJ$ este isoscel şi BB' mediatoarea $\measuredangle AB'J$. **1pct**

In triunghiul ABB' , avem $m(\measuredangle AB'B)=60^\circ$ .Deducem că $m(\measuredangle AB'B)==m(\measuredangle JB'B)==m(\measuredangle JB'C)=60^\circ$, deci $B'J$ este bisectoarea $\measuredangle BB'C$ .In triunghiul isoscel $BB'C$ $(m(\measuredangle B'BC)=m(\measuredangle B'CB)=30^\circ)$,J este pe mediatoarea segmentului BC, adică $[JB]=[JC]$. **1pct**

BAREM, clasa a V – a

1. **a)** $A = 111a + 111b + 111c = 111(a+b+c) = 37 \cdot 3(a+b+c) \vdots 37$ **4pct**

b) $\overline{3ab} + \overline{b4a} + \overline{ab2} = 111a + 111b + 342 = 111(a+b) + 342$ **2pct**

$111(a+b) + 342 = 1341 \Leftrightarrow 111(a+b) = 999 \Leftrightarrow a + b = 9$, deci $\overline{ab} \vdots 9$ **1p ct**

2. $A = 2^n \cdot 3^n \cdot 5^n (201 \cdot 2 - 5 + 3)$ **3pct**

$A = 4 \cdot 3^n \cdot 10^{n+2}$ **2pct**

A se termină cu 2016 zerouri când $n + 2 = 2016 \Leftrightarrow n = 2014$ **2pct**

3. a) Membrul stâng este număr par, deci şi membrul drept este par

Membrul drept este par când a^n este par, deci a este par, $a \in \{2,4,6,8\}$ **1pct**

1) Dacă $a = 2$ obţinem $2014 = 2^n + \overline{bb0} \Rightarrow n \leq 10$

i) Dacă $n = 10$, obţinem $2014 = 2^{10} + \overline{bb0} \Leftrightarrow \overline{bb0} = 990, \Rightarrow b = 9$

ii) Dacă $n = 9$, obţinem $2014 = 2^9 + \overline{bb0} \Leftrightarrow \overline{bb0} = 1502$, imposibil **1pct**

2) Dacă $a = 4$, obţinem $2014 = 4^n + \overline{bb0}$ de unde rezultă $n = 5$, adică $2014 = 1024 + \overline{bb0} \Leftrightarrow \overline{bb0} = 990$ rezultă $b = 9$ **1pct**

3) Dacă $a = 6$, obţinem $2014 = 6^n + \overline{bb0}$ relaţie imposibilă, căci ultima cifră a lui 6^n este 6

4) Dacă $a = 8$, obţinem $2014 = 8^n + \overline{bb0}$, relaţie imposibilă **1pct**

b) Din relaţie rezultă că x este număr impar, deci are forma $x = 2p - 1, p \neq 0$ **1pct**

Cum $1 + 3 + 5 + \cdots + (2p - 1) = p^2$, relaţia dată devine: $p^2 = 49^{2014}$ adică $p^2 = \left(7^{2014}\right)^2$, de unde $p = 7^{2014}$, atunci $x = 2 \cdot 7^{2014} - 1$ **2pct**

4.

Dacă $n \in N^*$, avem $n < n^2$, de unde $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$ **1pct**

Căutăm fracţiile $\frac{3}{n_1}, \frac{3}{n_2}, \ldots, \frac{3}{n_{35}}$, astfel încât $\frac{1}{n^2} < \frac{3}{n_1} < \frac{3}{n_2} < \ldots. < \frac{3}{n_{35}} < \frac{1}{n}$ (*) **1pct**

Din $(*) \Rightarrow n_{35} < n_{34} < \ldots. < n_2 < n_1$ şi $3n < n_{35} < n_{34} < \ldots < n_2 < n_1 < 3n^2$ **2pct**

Între $3n$ şi $3n^2$ există exact 35 numere naturale pentru $n = 4$, şi anume

$3 \cdot 4 < 13 < 14 < 15 < \ldots < 47 < 3 \cdot 16$ **2pct**

Obţinem fracţiile $\frac{3}{13}, \frac{3}{14}, \ldots, \frac{3}{47}$ **1pct**

BAREM clasa a IV – a

1. a)Care este cel mai mic număr de trei cifre în a cărui scriere nu apare cifra 1?
   b) Câte numere impare mai mici decât 100 au cifra zecilor 7.
   c) Care este cel mai mare număr par scris cu patru cifre diferite?

Solutie.

a) 200 **2pct**

b) 71,73,75,77,79-5 numere **2pct**

c) 9876 **3pct.**

2. Aflaţi valoarea numerică a lui x din $10 \cdot \{x - 10 \cdot [36 + 10 \cdot (24 + 2014 : 2014)]\} = 100$

$2014 : 2014 = 1$

$24 + 1 = 25$

$10 \cdot 25 = 250$

$250 + 36 = 286$ cate **1 pct** fiecare operatie.

$x - 10 \cdot 286 = 10$

$x = 10 + 2860$

$x = 2870$

3. Suma a trei numere naturale este 118. Dacă din primul număr luăm 12, la al doilea număr adăugăm 3 şi din al treilea număr luăm 16 obţinem trei numere naturale consecutive (în această ordine).

Soluţie

Fie a, b, c cele trei numere naturale **1pct**

$a + b + c = 118$ şi $a - 12 = x, b + 3 = x + 1, c - 16 = x + 2$ **2pct**

Din relaţiile de mai sus obţinem $a = x + 12, b = x + 1 - 3, c = x + 2 + 16$, (*) **2pct**

Care înlocuite în $a + b + c = 118$ dau $x = 30$ **1pct**

Obţinem $a = 42, b = 28, c = 48$ **1pct**

4 Completaţi următoarele pătrate "magice" (suma elementelor de pe linie, coloană şi diagonale este aceeaşi)

8	**1**	6
3	5	**7**
4	9	2

3 pct

16	21	14
15	**17**	19
20	**13**	**18**

4pct